Lycée Thyna SFAX 2020/2021	Devoir de Synthèse N° 1 Durée :2 Heures	Mr SAEMONGI 4ème Sciences

Exercice 1(3 pts)

Choisir la bonne réponse avec **justification**

1. $Si\ \ f(x) = x^2 + 3x + 1\ \ et\ g(x) = \frac{x+1}{x-1}\ alors\ \lim\limits_{x\to 1^-} fog(x) =$ a) 0 b)$+\infty$ c) $-\infty$

2. Soit f la fonction dont le tableau de variation est le suivant

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f(x)	5	(-4)	$+\infty$

i) $f([2\,;+\infty\,[\,) =$

a) $]5,+\infty[$ b) $[-4,+\infty[$ c) $]-4,+\infty[$

ii) l'équation f(x) = 3 admet sur IR

a) deux solutions b) une unique solution c) aucune solution

Exercice 2(6 pts)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{1+x^2}} + 2.$

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan munie d'un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$

1)Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $f'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)^2}$

2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$; interpréter graphiquement le résultat

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; interpréter graphiquement le résultat

3) a)Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à C au point I(0 ;2) .

b) Etudier la position de C par rapport à (T) . c) Tracer C et (T) .

4) a)Montrer que pour tout $x \in [\sqrt{2}; +\infty[$ on a: $0 < f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

b) Soit la fonction g définie sur $[\sqrt{2}; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$

*) Montrer que g est strictement décroissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$

**) Déduire alors que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $[\sqrt{2}; +\infty[$ une unique solution α

Exercice 3 (6 pts)

Soit dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation

$$(E) :\ z^2 - \left(1 + i\left(2+\sqrt{3}\right)\right)z - 2\left(\sqrt{3} - i\right) = 0$$

1. a- Vérifier que 2i est une solution de (E).
   b- déterminer l'autre solution de (E) .
2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{U}; \vec{V})$ on note M ; N et I les points d'affixes respectifs $Z_M = 1 + i\sqrt{3}$ et $Z_N = 2i$ et $Z_I = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}+2}{2}$
   a) Mettre les nombres complexes Z_M et Z_N sous la forme exponentielle.

b) Vérifier que M et N sont deux points du cercle (C) de centre O et de rayon 2.
c) Vérifier que I est le milieu du segment [MN]
d) Construire le cercle (C)ainsi que les points M ; N et I.

3. a) Justifier que la demi-droite [OI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MON}$
   b) Vérifier que $(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z$
   c) Montrer que $(\widehat{\vec{U};\overrightarrow{OI}}) = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ $k \in Z$
   d) En déduire que $Z_I = \sqrt{2+\sqrt{3}}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.
4. Donner alors les valeurs exactes de coscos $\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et sin $\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

Exercice 4 (5 pts)

On donne en annexe (3) la courbe représentative dans un repère orthonormé d'une fonction **f** définie sur $[-2;0[$

1−par une lecture graphique :

a−donner f (−2), f (−1) , $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$,f' (−1) et $\lim\limits_{x\to(-2)^+} \frac{f(x)+1}{x+2}$

b−donner une équation de la tangente T au point d'abscisse −1

c−donner $f([-2;0[)$

d−dresser le tableau de variation de f

e−donner le signe de f, $\forall x \in [-2;0[$

Annexe 3